9. *Abu-Saleem A., Banaru M. B.* Some applications of Kirichenko tensors // An. Univ. Oradea, Fasc. Mat. 2010. Vol. 17, №2. P. 201—208.
10. *Банару М. Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

M. Banaru

On almost contact metric structure on 0- or 1-hypersurface of almost Kählerian manifolds

The Cartan structure equations of the almost contact metric structure induced on a hypersurface of an almost Kählerian manifold are obtained. The following supposition is introduced: the properties of almost contact metric structures on totally geodesic and 1-type hypersurfaces in almost Kählerian manifolds are identical.

Key words: almost contact metric structure, 1-type hypersurfaces, totally geodesic hypersurface, Kählerian manifold, almost Kählerian manifold.

УДК 514.76

М. Б. Банару, Г. А. Банару
Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com

Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли

Получен критерий эйнштейновости уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав.

Ключевые слова*:* алгебра октав, 6-мерное уплощающееся эрмитово подмногообразие, многообразие Эйнштейна.

1. Известно [1], что в алгебре Кэли $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^{8}$ определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X, Y, Z) = -X(\overline{Y}Z) + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y;$$

$$P_2(X, Y, Z) = -(X\overline{Y})Z + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \overline{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. Если $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением: $J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2)$, $\alpha = 1, 2$, где $\{e_1, e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [1]. Если индуцированная на M^6 почти эрмитова структура интегрируема, то такое подмногообразие называется эрмитовым. Точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 — единица алгебры Кэли [1]. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа [1]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа. 6-мерное подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется уплощающимся (planar, реже flattening), если оно содержится в гиперплоскости алгебры октав [2—4].

2. Воспользуемся записанными в A-репере структурными уравнениями эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав [3; 4]:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b;$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b; \qquad (1)$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2} \delta^{ah}_{bg} D_{hd} D^{gc} + \sum_\phi T^\phi_{\hat{a}\hat{c}} T^\phi_{bd} \right) \omega_c \wedge \omega^d,$$

где $\{\omega^k\}$ — компоненты форм смещения, $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности. Условимся, что здесь и далее $\varphi = 7, 8$; $a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3$; $\hat{a} = a + 3$; $k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Как и в [5], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{123}_{abc}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon^{abc}_{123}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три; $\delta^{ah}_{bg} = \delta^a_b \delta^h_g - \delta^a_g \delta^h_b$; $D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}$; $D_{cj} = \mp T^8_{cj} + iT^7_{cj}$, $D_{\hat{c}j} = \mp T^8_{\hat{c}j} - iT^7_{\hat{c}j}$, где $\{T^\varphi_{kj}\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия M^6 [3].

Эрмитово $M^6 \subset \mathbf{O}$ является уплощающимся в том и только том случае, если

$$T^8_{ab} = \mu T^7_{ab}; \quad T^8_{\hat{a}\hat{b}} = \bar{\mu} T^7_{\hat{a}\hat{b}}; \quad \mu \in C; \quad \mu - const. \tag{2}$$

Это можно объяснить следующим образом. Пусть 6-мерное подмногообразие алгебры Кэли является подмногообразием гиперплоскости в $\mathbf{O}$. Тогда, если пользоваться терминологией линейной алгебры, T^8_{kj} и T^7_{kj} оказываются «линейно зависимыми» для каждой точки подмногообразия M^6. Обратная цепочка рассуждений также очевидна. Отметим лишь, что случай, когда хотя бы одно из значений T^φ_{kj} обращается в нуль, мы исключаем. К числу уплощающихся относятся и 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав (это соответствует случаю $\mu = i$ [4]). Другими примерами уплощающихся подмногообразий служат 6-мерные локально симметрические $M^6 \subset \mathbf{O}$ [4; 5]. Обратим внимание на то, что при этом среди локально симметрических эрмитовых $M^6 \subset \mathbf{O}$ есть и не келеровы подмногообразия алгебры октав.

Как известно [6; 7], многообразие называется эйнштейновым, если его тензор Риччи пропорционален метрическому тензору:

$$ric = \varepsilon\, g, \qquad \varepsilon - const.$$

Спектр тензора Риччи выводится из структурных уравнений (1), а вид матрицы метрического тензора в А-репере хорошо известен [2]:

$$\left(g_{kj}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right),$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Мы получаем, что эрмитово $M^6 \subset \mathbf{O}$ будет являться многообразием Эйнштейна в том и только том случае, если

$$ric_{\hat{a}b} = \varepsilon\, \delta_b^a\ ,\ \ ric_{a\hat{b}} = \varepsilon\, \delta_a^b\ .$$

С учетом (1) эти условия можно переписать так:

$$-\sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{c}}\, T^{\varphi}_{cb} = \varepsilon\, \delta_b^a\ ; \quad -\sum_{\varphi} T^{\varphi}_{ac}\, T^{\varphi}_{\hat{c}\hat{b}} = \varepsilon\, \delta_a^b\ . \tag{3}$$

Наконец, воспользуемся соотношениями (2), характеризующими именно уплощающиеся 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. Тогда формулы (3) примут следующий вид:

$$-\left(1+|\mu|^2\right) T^7_{\hat{a}\hat{c}}\, T^7_{cb} = \varepsilon\, \delta_b^a\ ; \quad -\left(1+|\mu|^2\right) T^7_{ac}\, T^7_{\hat{c}\hat{b}} = \varepsilon\, \delta_a^b\ . \tag{4}$$

Таким образом, справедлива

Теорема. *Эрмитово 6-мерное уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли является эйнштейновым в том и только том случае, если выполняются соотношения (4).*

Список литературы

1. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Известия высших учебных заведений. Математика. 1980. №8. С. 32—38.

2. *Banaru M.B. Banaru G.A.* About six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Scientific Bulletin of the Politehnica University of Timişoara. Transactions on Mathematics and Physics. 2001. Vol. 46 (60), №1. P. 13—17.

3. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1(74). P. 23—32.

4. *Банару М.Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

5. *Банару М.Б.* О локально симметрических 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 11—17.

6. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М., 1990.

7. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

M. Banaru, G. Banaru

On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra

A criterion for planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra to be Einstein is obtained.

Key words: Cayley algebra, planar 6-dimensional Hermitian submanifold, Einstein manifold.

УДК 514.75

О.О. Белова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
olgaobelova@mail.ru

О кручении аналога связности Нейфельда в пространстве центрированных плоскостей

В n-мерном проективном пространстве рассмотрено пространство Π центрированных плоскостей. Над ним возникает некоторое главное расслоение. В этом